**מתמטיקה בדידה - תרגיל 4 – תרגול מתקדם ביחסים**

**להגשה: 1ב, 2ב, 3א, 6ג, 8, 10, 12ב, 13, 14**

1. **תהיינה קבוצות ויהיו  יחסים. הוכח/י את חוקי ה"פילוג" הבאים:**
2. **~~~~**

אוכיח כאן גם משפט דומה, כיון שהוא מסייע לפתרון שאלה בהמשך:

**טענה 1א\*: (לגבי הקבוצות המתאימות)**

צד א: יהי . צ"ל כי או .

צד ב: יהי או . צ"ל כי .

1. ****

יהי . צ"ל כי וגם .

אוכיח כאן גם משפט דומה, כיון שע"פ הנאמר בתרגול, הוא מסייע לפתרון שאלה בהמשך:

**טענה 1ב\*: (לגבי הקבוצות המתאימות)**

יהי . צ"ל כי וגם .

1. **~~~~**
2. **~~~~**
3. **תהיינה קבוצות ויהיו  יחסים.**
4. **~~הוכח/י : .~~**

**שים/י לב שהוכחת שפעולת ההרכבה היא אסוציאטיבית (-קיבוצית) ולכן ניתן לרשום את ההרכבות הנ"ל .**

**בפרט, אם R יחס על קבוצה A נוכל להגדיר את היחס  להיות  כאשר R מופיע n פעמים ונוכל אף להסיק את השוויון  ואת השוויון  לכל n ו- m טבעיים.**

1. **1) הוכח/י: **

**2) הסק/י מסעיף ב שאם  יחס על A אז  וכן לכל n טבעי: .**

נוכיח באינדוקציה במקוצר:

1. **~~הוכח/י: .~~**
2. **~~בסעיפים הקודמים נתקלנו ב"חוקי חזקות" עבור הרכבות יחסים. שים/י לב שלא הגדרנו חזקה של יחס עם מעריך שלילי מלבד 1-.~~**

**~~האם מתקיים גם  ?~~**

1. **א. תהיינה קבוצות ויהיו  ו- יחסים כך ש- ו- .**

**הוכח/י:  .**

**~~ב. תהיינה קבוצות ויהיו  יחסים כך ש- ויהי  יחס .~~**

**~~הוכח/י שניתן לבצע "הרחבה" משמאל:  .~~**

לכל T מתקיים , ולכן זהו מקרה פרטי של 3א.

**~~האם ניתן לבצע גם "צמצום"? כלומר, האם מכך ש-  ניתן להסיק ?~~**

1. **~~תהי Aקבוצה ויהיו  יחסים על A כך ש-. הוכח/י:~~**
2. **~~~~**
3. **~~~~**
4. **~~תהיינה  קבוצות,  יחס ו-  יחס הזהות על הקבוצה X (כמקובל לסמן). הוכח/י: א.  ב.  ג.  ד. ~~**

**תזכורת – יחס R על קבוצה A נקרא יחס רפלקסיבי כאשר .**

**יחס R על קבוצה A נקרא יחס סימטרי כאשר .**

**יחס R על קבוצה A נקרא יחס אנטי-סימטרי כאשר .**

**יחס R על קבוצה A נקרא יחס טרנזיטיבי כאשר .**

**השתדל/י להשתמש בטענות המופיעות בשאלות 1-5 וענה/י על השאלות הבאות ללא שימוש ביחס השייכות כלומר ללא שימוש בסימונים  ו- .**

**רצוי מאד להבין את כל הטענות שמופיעות בשאלות 1-5 (גם אם לא תוכיח/י את כולן) כך שתוכל/י להשתמש בהן בהמשך דף תרגיל זה, בדפים הבאים וכן במבחן.**

1. **~~הוכח/י שאם  יחס רפלקסיבי אז :  .~~**

ע"פ 3ב, 5ב:

ומכאן באינדוקציה ע"פ 3ב:

1. **~~מצא/י דוגמה ליחס לא רפלקסיבי R המקיים  .~~**
2. **הוכח/י שאם  רפלקסיבי אז גם  רפלקסיבי וגם  רפלקסיבי לכל  טבעי.**

השתמשתי במשפטים משאלה 4ב ו5ג.

השתמשתי במשפט מסעיף א', ובתכונת הטרנזיטיביות של יחס-הסדר "מוכל ב\_".

1. **~~יהי  יחס. נגדיר את המושגים הבאים:~~**

**~~התחום של היחס R הוא -  ויסומן .~~**

**~~התמונה של היחס R היא - ותסומן .~~**

**~~השתמש/י במושגים הנ"ל ונסח/י תנאי על היחס R המוגדר על A -~~**

1. **~~כך שיתקיים .~~**
2. **~~כך שיתקיים .~~**
3. **יהי יחס כלשהו על קב' A . הוכח/י: היחסים  סימטריים.**

ע"פ המשפטים משאלה 1 ג-ד, ומשאלה 2ג, יחסים אלו מקיימים את תכונת הסימטריות – שהם שווים להופכי של עצמם.

1. **~~הוכח/י שאם  יחס אנטי סימטרי על קב'A , אז גם  אנטי סימטרי.~~**
2. **~~יהיו  שני יחסים אנטיסימטריים על . האם בהכרח גם  אנטי סימטרי? נמק/י!~~**
3. **~~יהי יחס אנטי סימטרי על קב' A. האם בהכרח גם  אנטי סימטרי? נמק/י!~~**
4. **הוכח/י: אם  יחס טרנזיטיבי על קבוצה A, אז גם  טרנזיטיבי.**

ע"פ 2ב2, מתקיים: . ע"פ הטרנזיטיביות מתקיים , וע"פ 4ב: כנדרש.

1. **הוכח/י: אם  יחס טרנזיטיבי על קבוצה A, אז גם  טרנזיטיבי לכל  טבעי.**

טרנזיטיבי, אמ"ם . ע"פ 2א ניתן לומר זאת: .

ע"פ 3ב, ובאינדוקציה:

מכאן ניתן לכתוב את השרשרת:

ובפרט נשים לב ש, כנדרש.

הוכחה נוספת:

באינדוקציה על 3א ניתן לומר שאם יש לנו n זוגות יחסים, המסומנים אז מתקיים:

*בפרט כאשר נגדיר לכל ש, נקבל , וע"פ 2א מתקיים , כנדרש.*

1. **~~יהיו  שני יחסים טרנזיטיביים על .~~**
2. **~~הוכח/י ש-  יחס טרנזיטיבי.~~**
3. **~~מצא/י דוגמה לכך ש-  אינו טרנזיטיבי.~~**
4. **~~הוכח/י שאם  אז גם יחס טרנזיטיבי.~~**
5. **~~א. הוכח/י: אם  הוא יחס שקילות על  אז, גם  הוא יחס שקילות על .~~**

**ב. הוכח/י: אם  הוא יחס סדר על  אז, גם  הוא יחס סדר על .**

טרנזיטיביות הוכחה לעיל 10א, רפלקסיביות הוכחה לעיל 6ג. אנטי-סימטריות מוכחת ע"פ ההגדרה, בהתחשב בשאלה 2ג.

1. **יהיו  יחסי שקילות על .**
2. **הוכח/י ש-  הוא יחס שקילות על .**

צ"ל

אם קבוצה מוכלת בכל אחת משתי קבוצות – הרי שהיא מוכלת בחיתוך ביניהן, ולכן מתקיים .

ע"פ 1ד, והגדרת הסימטריות:

ע"פ 1ב + 1ב\* (עיי"ש):

השתמשתי בכלל של חיתוך קבוצות האומר , וכן . כמו"כ השתמשתי בתכונת הטרנזיטיביות של יחס ההכלה, ובכך שכל אחד מהיחסים מכיל את הריבוע של עצמו, בגלל שהם טרנזיטיביים.

1. **הוכח/י ש-  הוא יחס שקילות אם, ורק אם .**

צ"ל כי:

ע"פ 2ב והסימטריות, לכל סימטריים מתקיים . מכאן נובע שהיחס הוא סימטרי אמ"ם מתקיים השויון. נותר להוכיח שהשויון גורר גם רפלקסיביות וטרנזיטיביות.

רפלקסיביות מוכחת ע"פ 3א באופן ישיר (יחס הזהות מוכל בכל אחת מהקבוצות, ולכן הוא מוכל בהרכבתן).

טרנזיטיביות: ע"פ האסוציאטיביות של ההרכבה, וע"פ 3א:

השתמשתי בכך שכל אחד מהיחסים מכיל את הריבוע של עצמו, בגלל שהם טרנזיטיביים.

1. **הבא/י דוגמה ליחסי שקילות  עבורם  איננו יחס שקילות.**

יחס האיחוד הזה איננו טרנזיטיבי, כי הוא לא מכיל את .

1. **הוכח/י שאם  הוא יחס שקילות אז, וגם  .**

ע"פ 3א, בהתחשב ב5(א-ב) ומכיון שיחס הזהות מוכל בכל אחד מהיחסים (כי הם רפלקסיביים), מתקיים:

ע"פ 1א + 1א\* (עיי"ש):

איחוד בין קבוצות מוכל בקבוצה אחרת אמ"ם כל אחת מהן מוכלת בה, ומכיון ש הינו טרנזיטיבי נגיע למסקנא:

הראינו הכלה הדדית שהיא הגדרתו של השיוויון. מכיון שפעולת האיחוד היא סימטרית, לכן כל מה שהוכחנו לגבי R נכון לגבי S ולהיפך, ומכיון שיחס השיוויון הוא טרנזיטיבי לכן . מ.ש.ל.

(המשפט האחרון מוכח ג"כ לעיל ב)

1. **האם היחס  הוא יחס שקילות? נמק/י!**

לא! ייתכן שהוא לא טרנזיטיבי. לדוגמא: R שכתבתי בשאלה ג.

1. **יהיו  יחסי סדר על .**
2. **האם בהכרח גם  הוא יחס סדר על ?**

כן. נוכיח אנטי-סימטריות (ע"פ 1ד):

(את שמירת הרפלקסיביות והטרנזיטיביות תחת חיתוך הוכחתי לעיל 13א).

1. **האם בהכרח גם  הוא יחס סדר על ?**

לא. דוגמא נגדית ליחסי סדר שהאיחוד ביניהם איננו אנטי-סימטרי, ואיננו טרנזיטיבי: